Ver0．92

楕円積分　数値計算ノート

2012年12月8日

履歴

	リリース	内容
Ver　0．8	2011年3月6日	初版
Ver0．81	2011年3月19日	誤字修正、不要ページ削除
Ver0．82	2011年3月26日	4.3　誤字修正等
Ver0．83	2011年4月16日	10章の追加　超幾何級数による第1種完全楕円積分のランデン変換の導出
Ver0．84	2011年4月17日	11章の追加　算術幾何平均による第 1 種完全楕円積分ランデン変換の導出
Ver0．84	2011年4月17日	12章の追加　マクローリン展開による第 1 種完全楕円積分の展開式の導出
Ver0．85	2011年4月23日	13章の追加　超幾何級数による第1種、第2種完全楕円関数の級数展開式の導出
Ver0．85	2011年4月23日	2章修正　級数展開による第１種、第２種完全楕円積分の数値計算方法
Ver0．86	2011年4月24日	公式追加　誤字、誤式修正
Ver0．87	2011年4月29日	公式の項目追加、忘備録追加
Ver0．90	2012年10月20日	算術幾何級数を使った第１種、第２種完全楕円積分の数値計算方法追加
Ver0．92	2012年12月8日	9章の第２種不完全楕円積分のランデン変換式導出修正 1 章ランデン変換式解釈追記

　高周波の伝送線路を計算するとき、楕円積分がよく現われます。Excelを使って、伝送線路定数を計算する場合、Excelの組込み関数に楕円積分がないため、簡単な計算式を作ろうと思ったのが、このノートを作成するきっかけになりました。数学を専門として書いたものではないので、厳密性には、問題があると思います。

　楕円積分の数値計算法を調べた中では式の導出過程などが記載されたものが少なかったので、忘れないように残しておきます。楕円積分の数値計算の検討をされている方の参考になれば幸いです。

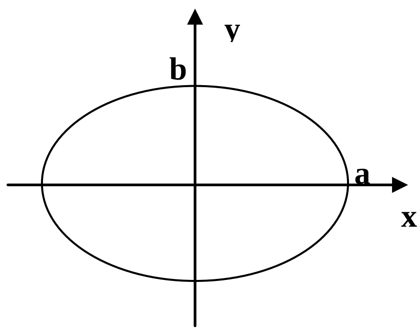
1　楕円積分について

1．1楕円の円弧

まずは、楕円の円弧を求める問題から楕円積分が含まれる式を導出してみます。

$a > b > 0$　とすると楕円の方程式は

(1-1)　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



この楕円の第1象限の円弧の長さを L は

(1-2)　$$L=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

(1-1)を x で微分すると

(1-3)　$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

(1-1)より

(1-4)　$$a^2y^2=b^2(a^2-x^2)$$

であるから

(1-5)　$$x=at\ 、k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

とおけば、(1-2)式は、(1-3)、(1-4)、(1-5)より

(1-6)　$$L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}dx=\int_0^a\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx=a\int_0^a\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt$$

このような形の積分を楕円積分といいます。この楕円積分は第 2 種完全楕円積分と呼ばれます。

1．2楕円積分の定義

定義 1-1

第 1 種完全楕円積分（the complete elliptic integral of the first kind）

(1-7) $$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad (0\le k<1)$$

第 2 種完全楕円積分（the complete elliptic integral of the second kind）

(1-8) $$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx\qquad (0\le k<1)$$

k を母数(modulus)という。また、最初の式をルジャンドルの標準形、後の式をヤコビの標準形と呼びます。

定義 1-2

$a\,,b$ を用いた第 1 種完全楕円積分の定義

(1-9) $$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

$a\,,b$ を用いた第 2 種完全楕円積分の定義

(1-10) $$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cdot d\theta$$

(1-9)式で　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ なので、(1-5)式の k より

(1-11) $$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}K(k)$$

(1-10)式も同様に

(1-12) $$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}\cdot d\theta=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=aE(k)$$

定義 1-3

k' を補母数（complementary modulus）とよび、母数 k により定義されます。

(1-13) $$k'=\sqrt{1-k^2}$$

１．３ ランデン変換について

半径1の円の円周上の点を(x,y)、角度を 2β とすれば以下となります。あえて 2β としたのは以降の変換式をわかりやすくするためです。

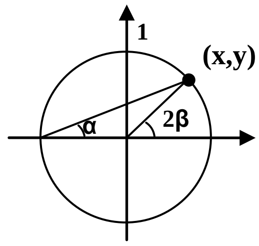
(1−14)　　　$x = \cos 2\beta$、　$y = \sin 2\beta$

ここで、α は (x,y)と$(-1,0)$を結ぶ線と x 軸との角度です。また、$\alpha = \beta$ です。

従って、以下の式が成り立たちます。

(1−15)　　　$x = 1 + \cos 2\beta$、　$y = \sin 2\beta$

(1−16)　　　$\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$



(1−16)は tan の半角の公式です。楕円についても、同様の変換を考えます。

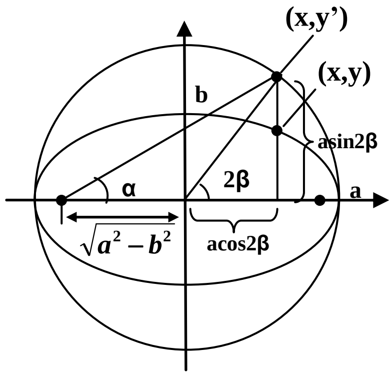
楕円の長半径を a、短半径を b とし、周上の点を(x,y)、角度を 2β とすれば

(1−17)　　　$x = a\cos 2\beta$、　$y = b\sin 2\beta$

ここで、β は (x,y)と楕円の焦点を結ぶ線と、x 軸の角度です。

離心率を k は以下のようになります。この k は楕円積分では母数と呼ばれます。

(1−18)　　　$k = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} \iff ak = \sqrt{a^2 - b^2}$



楕円上の点(x,y)が、楕円の周上を動くとき、
半径 a の円点も同時に動くと考えると
楕円の図から、以下の式が成り立ちます。

(1−19)　　　$x = ak + a\cos 2\beta$、　$y' = a\sin 2\beta$

(1−20)　　　$\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\beta}{k + \cos 2\beta}$

(1−20)の変数変換をランデン変換 (Landen’s Transformation)と呼びます。

２．級数展開による第１種、第２種完全楕円積分の数値計算方法

２．１マクローリン展開による計算

(1−7)の第 1 種楕円積分のルジャンドル標準形をマクローリン展開した式は

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdot\cdot\cdot\cdot\right] \qquad (2\text{−}1)$$

この式を使えば、第１種楕円積分を求めることができます。しかし、母数 k が大きくなると収束が遅くなり多数の項まで計算する必要があります。

(2−1) 式の収束を $k=0.1$ と $k=0.9$ の場合で4項まで計算して比較しました。

$$K(0.1)=\frac{\pi}{2}\left[1+0.0025+1.40625\cdot 10^{-5}+9.75663\cdot 10^{-8}\right]$$

$$K(0.9)=\frac{\pi}{2}\left[1+0.2025+0.09226+0.05189\right]$$

$k=0.1$ の場合は 4 項目が 10^{-8} になっているので、たとえば 10^{-4} 程度の精度であれば 3 項まで計算すれば良いことになります。$k=0.9$ の場合は4項目が 10^{-2} であり収束が遅いことがわかります。

２．２ ランデン変換による収束性の改善

収束性を改善するには母数 k を小さくすれば良いことがわかりました。母数 k を小さくする方法として下降ランデン変換 (Landen's Transformation)があります。ランデン変換の式を示します。

(2-2) $$K(k_0)=(1+k_1)K(k_1)$$

(2-3) $$k_1=\frac{1-\sqrt{1-{k_0}^2}}{1+\sqrt{1-{k_0}^2}}$$

ここで(2-1)で計算する母数 k を k_0 とすると、ランデン変換した母数は k_1 になります。

ためしに、$k_0=0.9$ を(2-3)式で計算すると $k_1=0.39$ になり母数が半分以下に小さくなりました。母数をさらに小さくするためには、ランデン変換を繰り返します。今回の例では 2 回ランデン変換を用いています。この方法で $0 \le k^2 < 0.9$ まで計算します。

以上の式を整理して、Excel の1つのセルで計算できる第1種完全楕円積分の数値計算式を作成しました。（ζ $=k_0$）

（展開式－1） $0<\zeta^2<0.9$

```
=PI()*(1+0.25*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^4+0.140625*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^8+0.09765625*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^12+0.07476806640625*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^16+0.060562133789063*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^20+0.050889015197754*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^24+0.043878793716431*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^28+0.038565346039832*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^32+0.034399336436763*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^36+0.031045401134179*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^40+0.028287235330936*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^44+0.025979075503585*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^48+0.024019115665297*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^52+0.022334101173471*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^56+0.02086997676321*((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^60)/(1+SQRT(1-ζ^2))*(1+((1-(1-ζ^2)^(1/4))/(1+(1-ζ^2)^(1/4)))^2)
```

下線の部分が(2-14)の $(1+k_1)(1+k_2)$ です。

２．２ 補母数による収束性の改善

$k^2 \geq 0.9$ の場合は(1−13)の補母数 $k' = \sqrt{1-k^2}$ を用いて計算します。例えば、$k = 0.95$ の場合、$k' = 0.31$ になり、$k = 0.99$ の場合は $k' = 0.14$ になります。$k' \leq 0.31$ として 2 回ランデン変換して精度を 10^{-15} 程度に設定して、$K(k')$ を求めると(2−1)式の 3 項分を計算すればよい。

補母数 k' を用いて、第 1 種完全楕円積分を計算する式は

(2−4)
$$K(k) = -\frac{K(k')}{\pi}\ln\frac{k'^2}{16} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}k'^{2n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(2r-1)}$$

ただし

(2−5)
$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)$$

(2−4)式の各項を分解して、2つの項それぞれについて説明します。

(2−6)
$$K(k) = \kappa_1 + \kappa_2$$

(2−7)
$$\kappa_1 = -\frac{K(k')}{\pi}\ln\frac{k'^2}{16}$$

(2−8)
$$\kappa_2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}k'^{2n}\cdot\varsigma_n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}\varsigma_n\cdot k'^{2n}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cdot k'^{2n}$$

(2−9)
$$\lambda_n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}\varsigma_n$$

(2−10)
$$\varsigma_n = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(2r-1)}$$

(2−8)式は、$n=1$ から ∞ までの和になっています。適当な精度を確保できるころまで計算します。$n=14$ まで計算すれば、14 桁程度の精度が確保されます。

(2-9)のλ_nは、$n=14$とすると各nに対して定数となります。λ_nの計算結果を示します。

(2-10)

$\lambda_1=0.2500000000000000$ 、$\lambda_2=0.1640625000000000$

$\lambda_3=0.1204427083333330$ 、$\lambda_4=0.0948842366536458$

$\lambda_5=0.0782020568847656$ 、$\lambda_6=0.0664824962615967$

$\lambda_7=0.0578063777514866$ 、$\lambda_8=0.0511277645793078$

$\lambda_9=0.0458295358550949$、$\lambda_{10}=0.0415245529572978$

$\lambda_{11}=0.0379578436926501$、$\lambda_{12}=0.0349547161709425$

$\lambda_{13}=0.0349547161709425$ 、$\lambda_{14}=0.0301782266730210$

以上計算したλ_nを使って(2-9)式でκ_2を計算します。(2-7)式で計算したκ_1を使って(2-6)式で和を取れば$K(k)$を計算することができます。

以上の式を整理して、Excel の1つのセルで計算できる第1種完全楕円積分の数値計算式を作成しました。(ζ=k_0)

(展開式-2)　$\varsigma^2 \geq 0.9$

=<u>-1*(LN((1-ζ^2)/16)*(1+((1-ζ)/(1+ζ)))</u>*<u>(1+0.25*((1-ζ)/(1+ζ))^2+0.140625*((1-ζ)/(1+ζ))^4+0.09765625*((1-ζ)/(1+ζ))^6+0.07476806640625*((1-ζ)/(1+ζ))^8+0.060562133789063*((1-ζ)/(1+ζ))^10+0.050889015197754*((1-ζ)/(1+ζ))^12+0.043878793716431*((1-ζ)/(1+ζ))^14+0.038565346039832*((1-ζ)/(1+ζ))^16+0.034399336436763*((1-ζ)/(1+ζ))^18+0.031045401134179*((1-ζ)/(1+ζ))^20+0.028287235330936*((1-ζ)/(1+ζ))^22+0.025979075503585*((1-ζ)/(1+ζ))^24+0.024019115665297*((1-ζ)/(1+ζ))^26+0.022334101173471*((1-ζ)/(1+ζ))^28+0.0208699767632l*((1-ζ)/(1+ζ))^30)/2)</u>-(0.25*(1-ζ^2)^1+0.1640625*(1-ζ^2)^2+0.120442708333333*(1-ζ^2)^3+0.0948842366536458*(1-ζ^2)^4+0.0782020568847656*(1-ζ^2)^5+0.0664824962615967*(1-ζ^2)^6+0.0578063777514866*(1-ζ^2)^7+0.0511277645793078*(1-ζ^2)^8+0.0458295358550949*(1-ζ^2)^9+0.0415245529572978*(1-ζ^2)^10+0.0379578436926501*(1-ζ^2)^11+0.0349547161709425*(1-ζ^2)^12+0.0323915049813948*(1-ζ^2)^13+0.030178226673021*(1-ζ^2)^14)

下線の部分が(2－4)の第1項の部分です。

２．３ 第１種完全楕円積分の数値計算手順

２．３．１ $0 \le k^2 < 0.9$ の場合の方法

ランデン変換を２回行い、母数 k を、さらに小さくします。

(2-11) $$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k_0{}^2}}{1+\sqrt{1-k_0{}^2}}$$

(2-12) $$k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k_1{}^2}}{1+\sqrt{1-k_1{}^2}}$$

ランデン変換の式は(2-1)より

(2-13) $$K(k_0) = (1+k_1)K(k_1)\text{、}K(k_1) = (1+k_2)K(k_2)$$

２つの式から $K(k_1)$ を消去すれば

(2-14) $$K(k_0) = (1+k_1)(1+k_2)K(k_2)$$

(2-1)式の７項分を計算して $K(k_2)$ を求めて、(2-14)式より $K(k_0)$ を求めます。

２．３．２ $k_0 = 0.1$ の場合

$$k_1 = 2.51257867600905E\text{-}3$$
$$k_2 = 1.57826788263627E\text{-}6$$

$$\begin{aligned}
K(k_2) = \frac{\pi}{2}[1 &+ 6.22732337734029E\text{-}13 \\
&+ 8.72540131022751E\text{-}25 \\
&+ 1.50933052810168E\text{-}36 \\
&+ 2.87847127561842E\text{-}48 \\
&+ 5.80775592425197E\text{-}60 \\
&+ 1.21560554472309E\text{-}71 \\
&+ 2.61086696532066E\text{-}83] \\
&= 1.57079632679587
\end{aligned}$$

(2-9)を使いランデン変換する

$$\begin{aligned}
K(0.1) &= (1+k_1)(1+k_2)K(k_2) \\
&= (1+2.51257867600905E\text{-}3)(1+1.57826788263627E\text{-}06)
\end{aligned}$$

$$\times 1.57079632679587$$
$$= 1.57474556151736$$

上の $K(k_2)$ の計算結果を良く見ると、精度を 10^{-15} 程度だとすると 2 項目の 10^{-25} の項は精度向上に貢献していないことがわかります。

2．3．3　$k_0 = 0.9$ の場合

$$k_1 = 3.92864458385019E\text{-}01$$
$$k_2 = 4.18856860800388E\text{-}02$$

$$K(k_2) = \frac{\pi}{2}[1 + 4.38602674598889E\text{-}04$$
$$+ 4.32837688871923E\text{-}07$$
$$+ 5.27343800017854E\text{-}10$$
$$+ 7.08339103432979E\text{-}13$$
$$+ 1.00660133793534E\text{-}15$$
$$+ 1.48392396466290E\text{-}18$$
$$+ 2.24477878258425E\text{-}21]$$
$$= 1.57148596299439$$

(2-9)を使いランデン変換する

$$K(0.9) = (1 + k_1)(1 + k_2)K(k_2)$$
$$= (1 + 3.92864458385019E\text{-}01)(1 + 4.18856860800388E\text{-}02)$$
$$\times 1.57148596299439$$
$$= 2.28054913842277$$

上の $K(k_2)$ の計算結果を良く見ると、精度を 10^{-15} 程度だとすると 6 項目の 10^{-18} の項は精度向上に貢献していないことがわかります。

2．3．1　$k = 0.99$ の場合（$0.9 \le k^2$）

(2-4)式を用いて計算します。

$$k' = \sqrt{1 - k^2}\ ' = \sqrt{1 - 0.99^2} = 0.141067359796659$$

まず κ_1 を求めます。

$$\ln\frac{k'^2}{16} = 1n\frac{0.141067359796659^2}{16} = -6.68962426949147$$

$$\kappa_1 = -\frac{K(k')}{\pi}\ln\frac{k'^2}{16}$$

$$= -\frac{1.57869974203901}{\pi} \times (-6.68962426949147)$$

$$= 3.36164145804087$$

次にκ_2を求めます。

$$\kappa_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot k'^{2n}$$

$$= -(0.25 \times 1.99000000000000.\mathrm{E}-02$$
$$+ 0.1640625 \times 3.96010000000001\mathrm{E}-04$$
$$+ 0.120442708333333 \times 7.88059900000003.\mathrm{E}-06$$
$$+ 0.0948842366536458 \times 1.56823920100001.\mathrm{E}-07$$
$$+ 0.0782020568847656 \times 3.12079600999002.\mathrm{E}-09$$
$$+ 0.0664824962615967 \times 6.21038405988015.\mathrm{E}-11$$
$$+ 0.0578063777514866 \times 1.23586642791615.\mathrm{E}-12$$
$$+ 0.0511277645793078 \times 2.45937419155314.\mathrm{E}-14$$
$$+ 0.0458295358550949 \times 4.89415464119076.\mathrm{E}-16$$
$$+ 0.0415245529572978 \times 9.73936773596963.\mathrm{E}-18$$
$$+ 0.0379578436926501 \times 1.93813417945796.\mathrm{E}-19$$
$$+ 0.0349547161709425 \times 3.85688701712134.\mathrm{E}-21$$
$$+ 0.0349547161709425 \times 7.67520516407148.\mathrm{E}-23$$
$$+ 0.0301782266730210 \times 1.52736582765023.\mathrm{E}-24)$$
$$= 5.04093467968401.\mathrm{E}-03$$

κ_1とκ_2が計算できましたので()式で$K(k)$を計算します。

$$K(k) = \kappa_1 + \kappa_2 = 3.36164145804087000 + 5.04093467968401.\mathrm{E}-03$$
$$= 3.35660052336119$$

２．４　第1種完全楕円積分の数値計算結果

(展開式-1)より

$\boldsymbol{k = 0.1}$ の場合

$$\boldsymbol{K(0.1) = 1.5668619420216\underline{7}}$$

$\boldsymbol{k = 0.5}$ の場合

$$\boldsymbol{K(0.5) = 1.685750354812\underline{6}}$$

$\boldsymbol{k = 0.9}$ の場合

$$\boldsymbol{K(0.9) = 2.28054913842277}$$

(展開式-2 より

$\boldsymbol{k = 0.99}$ の場合

$$\boldsymbol{K(0.99) = 4.4955963958421\underline{5}}$$

$\boldsymbol{k = 0.9999}$ の場合

$$\boldsymbol{K(0.9999) = 5.64514821682 9\underline{87}}$$

下線が高精度数値計算サイトでの計算結果と一致しなかったところ

2．5　マクローリン展開による第 2 種完全楕円積分の展開式

(1-8)の第 2 種完全楕円積分のルジャンドル標準形をマクローリン展開した式は

(2-15)
$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2-\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}+\cdots\right]$$

(2-15)を超幾何級数でランデン変換します。

(2-16)
$$E(k)=\frac{\pi}{2(1+k_1)}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 {k_1}^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 {k_1}^4+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 {k_1}^6+\cdots\right]$$

(2-17)
$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}=\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2$$

(2-18)
$$\frac{\pi}{2(1+k_1)}=\frac{\pi(1+\sqrt{1-k^2})}{4}$$

ランデン変換すると母数が小さくなり計算の収束が早くなります。
この方法で $0\le k^2<0.9$ まで計算します。
(12-16)式の係数を計算して21項まで展開した式を示します。この式は、直接 Excel のセルにコピーして貼り付けるため π を PI()としています。メモ帳などにコピー貼り付けして置換機能で ζ を k を入力する適当なセルとすれば計算することが出来ます。

（展開式-3）　$0<\zeta^2<0.9$

=PI()*(1+SQRT(1-ζ^2))/4*(1+0.25*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^4+0.015625*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^8+0.00390625*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^12+0.00152587890625*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^16+0.000747680664062５*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^20+0.000420570373535156*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^24+0.000259637832641602*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^28+0.000171401537954807*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^32+0.00011902884580195*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^36+0.0000859983410919０9*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^40+0.0000641433907730９7*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^44+0.000049109783560652*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^48+0.0000384305850644７5*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^52+0.000030636627124103*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^56+0.000024815667970524*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^60+0.000020380836682823*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^64+0.000016942892778713*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^68+0.000014236736293224*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^72+0.000012077563683656*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^76+0.000010333865426829*(ζ/(1+SQRT(1-ζ^2)))^80+0.00000891032274048*(ζ^2/(1+SQRT(1-ζ^2))^2)^84)

2．6　第２種完全楕円積分の収束性の改善

$k^2 \geq 0.9$の場合は、$z = 1 - k^2$の級数展開式を用いて計算します。

(2-19)　$$E(k) = 1 + \ln\frac{16}{z}\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \left[\frac{1}{n(2n-1)} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{2}{r(r-1)} \right]$$

(2-20)　$$C_n = n(2n-1)\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \right]^2$$

(2-30)　$$z = 1 - k^2$$

(12-19)式の係数を計算して14項まで展開した式を示します。この式は、直接Excelのセルにコピーして貼り付けるためπを PI()としています。メモ帳などにコピー貼り付けして置換機能で ζ をkを入力する適当なセルとすれば計算することが出来ます。

(展開式-4)$\zeta^2 \geq 0.9$

=1+LN(16/(1-ζ^2))*(0.25*(1-ζ^2)^1+0.09375*(1-ζ^2)^2+0.05859375*(1-ζ^2)^3+0.042724609375*(1-ζ^2)^4+0.0336456298828125*(1-ζ^2)^5+0.0277576446533203*(1-ζ^2)^6+0.0236270427703857*(1-ζ^2)^7+0.0205681845545769*(1-ζ^2)^8+0.0182114134076983*(1-ζ^2)^9+0.0163396848074626*(1-ζ^2)^10+0.0148171232685854*(1-ζ^2)^11+0.0135543002627401*(1-ζ^2)^12+0.0124899401459544*(1-ζ^2)^13+0.011580645052911*(1-ζ^2)^14)-(0.25*(1-ζ^2)^1+0.203125*(1-ζ^2)^2+0.140625*(1-ζ^2)^3+0.106913248697917*(1-ζ^2)^4+0.0861434936523438*(1-ζ^2)^5+0.0721057891845703*(1-ζ^2)^6+0.0619933843612671*(1-ζ^2)^7+0.0543648806799735*(1-ζ^2)^8+0.0484063620595927*(1-ζ^2)^9+0.0436240574034321*(1-ζ^2)^10+0.0397012166681937*(1-ζ^2)^11+0.0364253766556837*(1-ζ^2)^12+0.0336487345955861*(1-ζ^2)^13+0.0312653021448977*(1-ζ^2)^14)

２．７　第２種完全楕円積分の数値計算結果

(展開式−3)より

$\boldsymbol{k = 0.1}$の場合

$$\boldsymbol{E(0.1) = 1.5668619420216\underline{7}}$$

$\boldsymbol{k = 0.5}$の場合

$$\boldsymbol{E(0.5) = 1.4674622093394\underline{3}}$$

$\boldsymbol{k = 0.9}$の場合

$$\boldsymbol{E(0.9) = 1.1716970527816\underline{1}}$$

(展開式−4)より

$\boldsymbol{k = 0.99}$の場合

$$\boldsymbol{E(0.99) = 1.02847580902880}$$

$\boldsymbol{k = 0.9999}$の場合

$$\boldsymbol{E(0.9999) = 1.00051450008378}$$

下線が高精度数値計算サイトでの計算結果と一致しなかったところ

３．ランデン変換による第１種完全楕円積分の数値計算方法

定義 3-1　第 1 種完全楕円積分の下降ランデン変換式

(3-1)　$$K(k)=\frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)、k'=\sqrt{1-k^2}$$

(3-1)式で

(3-2)　$$\kappa=\frac{1-k'}{1+k'} \Leftrightarrow 1+\kappa=1+\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{2}{1+k'}$$

(3-1)式は、κを用いて以下になる。

(3-3)　$$K(k)=(1+\kappa)K(\kappa)$$

定義 3-2　第 1 種完全楕円積分の上昇ランデン変換

(3-4)　$$K(k)=\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

３．1ランデン変換による第１種楕円積分の数値計算例

２．２項で、下降ランデン変換を行うと母数kが小さくなる説明をしました。ランデン変換を$k=0$になるまで繰り返りかえせば、数値計算を行うことができます。
(1-7)式より$k=0$の場合は

(3-5)　$$K(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-0^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

(3-3)式で$k=k_0$、$\kappa=k_1$とすると １回ランデン変換は

(3-6)　$$K(k_0)=(1+k_1)K(k_1)、\quad k_1=\frac{1-\sqrt{1-{k_0}^2}}{1+\sqrt{1-{k_0}^2}}$$

n回目のランデン変換の母数をk_nとすると

(3-7)　$$K(k_0)=(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)K(k_n)$$

ここで、$k_n\approx 0$となるまで、ランデン変換を行うので、(3-5)より$K(k_n)=\dfrac{\pi}{2}$となります。

(3−7)式は

(3−8) $$K(k_0) = (1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)\cdot\frac{\pi}{2}$$

(3−9) $$k_n = \frac{1-\sqrt{1-{k_{n-1}}^2}}{1+\sqrt{1-{k_{n-1}}^2}}$$

３．２計算例

$k_0 = 0.1$ の場合

(3−9)式より

k_1 = 2.51257867600905E-03、k_2 = 1.57826788263627E-06

k_3 = 6.22724094512638E-13、k_4 = 0

(3−8)式より

$K(0.1) = 1.5747455615173\underline{6}$

$k_0 = 0.5$ の場合

(3−9)式より

k_1 = 7.17967697244909E-02、k_2 = 1.29202623999477E-03

k_3 = 4.17333299557950E-07、k_4 = 4.35207425653080E-14、k_5 = 0

(3−8)式より

$K(0.5) = 1.685750354812\underline{6}$

$k_0 = 0.9$ の場合

(3−9)式より

k_1 = 3.92864458385019E-01、k_2 = 4.18856860800388E-02

k_3 = 4.38987841605046E-04、k_4 = 4.81775859102948E-08

k_5 = 5.55111512312579E-16、k_6 = 0

(3−8)式より

$K(0.9) = 2.28054913842277$

$\boldsymbol{k_0 = 0.99999}$の場合

(3−9)式より

$\boldsymbol{k_1 = 9.91095572163064\text{E-01}}$、$\boldsymbol{k_2 = 7.64987626950938\text{E-01}}$

$\boldsymbol{k_3 = 2.16511731532548\text{E-01}}$、$\boldsymbol{k_4 = 1.20023395295682\text{E-02}}$

$\boldsymbol{k_5 = 3.60166328012940\text{E-05}}$、$\boldsymbol{k_6 = 3.24299476267252\text{E-10}}$、$\boldsymbol{k_7 = 0}$

(3−8)式より

$\boldsymbol{K(0.99999) = 6.796214984443\underline{553}}$

計算結果の下線部は、高精度計算サイトの結果と比較して一致しなかった部分です。

4. ランデン変換による第2種完全楕円積分の数値計算方法

定義 4-1　第 2 種完全楕円積分の下降ランデン変換

(4-1)　$$E(k)=(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k)$$

(4-2)　$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

(4-1)式でn回目のランデン変換の母数をk_nとすると、$E(k_n)$およびk_{n+1}は次式となる

(4-3)　$$E(k_n)=(1+k_n')E(k_{n+1})-k_n'(1+k_{n+1})K(k_{n+1})$$

(4-4)　$$k_{n+1}=\frac{1-k_n'}{1+k_n'}=\frac{1-\sqrt{1-k_n{}^2}}{1+\sqrt{1-k_n{}^2}}$$

4. 1ランデン変換による第2種完全楕円積分の数値計算例

第 1 種完全楕円積分と同じように、ランデン変換を$k=0$になるまで繰り返りかえせば、数値計算を行うことができます。

(1-8)式より$k=0$の場合は

(4-5)　$$E(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-0^2\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

(3-3)式で$k=k_0$、$\kappa=k_1$とすると 1 回ランデン変換は

(3-6 再)　$$K(k_0)=(1+k_1)K(k_1)、\quad k_1=\frac{1-\sqrt{1-k_0{}^2}}{1+\sqrt{1-k_0{}^2}}$$

n回目のランデン変換の母数をk_nとすると

(3-7 再)　$$K(k_0)=(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)K(k_n)$$

ここで、$k_n\approx 0$となるまで、ランデン変換を行うので、(3-5)より$K(k_n)=\dfrac{\pi}{2}$となので、

(3-7)式は

(3-8 再)　$$K(k_0)=(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)\cdot\frac{\pi}{2}$$

４．2ランデン変換による第2種完全楕円積分の数値計算例

(4-1)で示した第 2 種完全楕円積分のランデン変換式も、第 1 種完全積分と同じように母数$k=0$になるまで繰り返せば数値計算を行うことができます。(4-1)式は、第 1 種完全楕円積分を含んだ式となります。

(4-3)、(4-4)式により$E(k_0)$を計算します。(4-3)式により

(4-6) $$E(k_0)=(1+k_0')E(k_1)-k_0'(1+k_1)K(k_1)$$

この式は、恒等式ですので次数を 1 つ上げても成り立ちますので、繰り返し次数を上げると以下のようになります。

(4-7) $$\begin{aligned}
&E(k_1)=(1+k_1')E(k_2)-k_1'(1+k_2)K(k_2)\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
&E(k_{n-1})=(1+k_{n-1}')E(k_n)-k_{n-1}'(1+k_n)K(k_n)\\
&E(k_n)=(1+k_n')E(k_{n+1})-k_n'(1+k_{n+1})K(k_{n+1})
\end{aligned}$$

このとき、母数kもランデン変換の式から以下となります。

(4-8) $$\begin{aligned}
k_1&=\frac{1-k_0'}{1+k_0'}=\frac{1-\sqrt{1-k_0{}^2}}{1+\sqrt{1-k_0{}^2}}\\
k_2&=\frac{1-k_1'}{1+k_1'}=\frac{1-\sqrt{1-k_1{}^2}}{1+\sqrt{1-k_1{}^2}}\\
&\quad\cdot\\
&\quad\cdot\\
k_n&=\frac{1-k_{n-1}'}{1+k_{n-1}'}=\frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}{}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}{}^2}}\\
k_{n+1}&=\frac{1-k_n'}{1+k_n'}=\frac{1-\sqrt{1-k_n{}^2}}{1+\sqrt{1-k_n{}^2}}
\end{aligned}$$

ここで、$k_{n+1}\approx 0$ならば(4-5)、(3-8)より$E(k_{n+1})=\dfrac{\pi}{2}$、$K(k_{n+1})=\dfrac{\pi}{2}$です。

(4-7)、(4-8)を、k_{n+1}から順次、次数を下げれば$E(k_0)$を計算することができます。

４．３計算手順

１）(4−8)式の変換を繰り返し k_0 、k_1・・・$k_{n+1} \approx 0$ になるまで順次計算する。

$k_{n+1} < 10^{-8}$ とする。

２）$K(k_{n+1}) = \frac{\pi}{2}$ とおいて、3章の考え方から $K(k_n)$ を、計算し順次 $K(k_1)$ まで求める。

$$K(k_n) = (1 + k_{n+1})K(k_{n+1}) = (1 + k_{n+1})\frac{\pi}{2}$$
$$K(k_{n-1}) = (1 + k_n)K(k_n)$$

$$K(k_1) = (1 + k_2)K(k_2)$$

３）$E(k_{n+1}) = \frac{\pi}{2}$ とおき、１）２）でもとめた k_0 、k_1・・・$k_{n+1} \approx 0$ および $k(k_{n+1})$ ～ $K(k_1)$ を用いて、(4−7)式および(4−8)、(4−6)式で $E(k_n)$ から $E(k_0)$ を順次計算する。

４．４　計算例

４．４．１　$k_0 = 0.1$ の場合

１）k_0、k_1・・・$k_{n+1} \approx 0$ の計算

$$k_1 = 2.51257867600905E\text{-}3、k_2 = 1.57826788263627E\text{-}6$$
$$k_3 = 6.22724094512638E\text{-}13$$

$$k_0' = \sqrt{1 - k_0^{\ 2}} = 0.994987437106620$$

$$k_1' = \sqrt{1 - k_1^{\ 2}} = 0.999996843469217$$

$$k_2' = \sqrt{1 - k_2^{\ 2}} = 0.999999999998755$$

$$k_3' = \sqrt{1-k_3^{\ 2}} = 1.000000000000000$$

2) $K(k_n)$の計算

$$K(k_3) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949、K(k_2) = 1.57079632679587$$
$$K(k_1) = 1.57079880593327$$

3) $E(k_n)$の計算

$$E(k_3) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949$$
$$E(k_2) = (1+k_2')E(k_3) - k_2'(1+k_3)K(k_3) = 1.57079632679392$$
$$E(k_1) = (1+k_1')E(k_2) - k_1'(1+k_2)K(k_2) = 1.57079384766240$$
$$E(k_0) = (1+k_0')E(k_1) - k_0'(1+k_1)K(k_1) = 1.56686194202167$$

４．４．２　$k_0 = 0.5$の場合

1) k_0、$k_1 \cdots k_{n+1} \approx 0$の計算

$$k_1 = 7.17967697244909E\text{-}02、k_2 = 1.29202623999477E\text{-}03$$

$$k_3 = 4.17333299557950E\text{-}07、k_4 = 4.35207425653080E\text{-}14$$

2) $K(k_n)$の計算

$$K(k_4) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949、K(k_3) = 1.57079632679496$$
$$K(k_2) = 1.57079698234058\ 、K(k_1) = 1.57282649325947$$

3) $E(k_n)$の計算

$$E(k_4) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949、E(k_3) = 1.57079632679483$$
$$E(k_2) = 1.57079567124962\ 、E(k_1) = 1.56877009021895$$
$$E(k_0) = 1.46746220933943$$

４．４．３　$k_0 = 0.9$の場合

１）k_0、$k_1 \cdots k_{n+1} \approx 0$の計算

$$k_1 = 3.92864458385019E\text{-}01、k_2 = 4.18856860800388E\text{-}02$$

$$k_3 = 4.38987841605046E\text{-}04、k_4 = 4.81775859102948E\text{-}08$$

$$k_5 = 5.55111512312579E\text{-}16$$

２）$K(k_n)$の計算

$$K(k_5) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949、K(k_4) = 1.5707963267949$$

$$K(k_3) = 1.57079640247207\ 、K(k_2) = 1.57148596299439$$

$$K(k_1) = 1.63730873071957$$

３）$E(k_n)$の計算

$$E(k_5) = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267949、E(k_4) = 1.5707963267949$$

$$E(k_3) = 1.57079625111773\ 、E(k_2) = 1.57010714452560$$

$$E(k_1) = 1.50830880857494\quad 、E(k_0) = 1.17169705278162$$

5. ランデン変換による第1種不完全楕円積分の数値計算方法

5. 1　定式化

命題 5-1　第1種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の恒等式

(5-1)　$$F(\alpha,k)=\frac{2}{1+k}F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

(5-2)　$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

(5-3)　$$k\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)$$ または $$\sin\alpha=\frac{(1+k')\sin\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin\beta}}$$

補題 5-1　第 1 種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の定式化

(5-1)式で n 回目のランデン変換の母数を k_n とすると、k_{n+1} は次式となる

(5-4)　$$k_{n+1}=\frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$$

(5-3)より

(5-5)　$$\beta_{n+1}=\frac{\sin^{-1}(k_n\sin\beta_n)+\beta_n}{2}$$

$F(\beta_n,k_n)$ は(5-1)、(5-4)より

(5-6)　$$F(\beta_n,k_n)=\frac{2}{1+k_{n+1}}F(\beta_{n+1},k_{n+1})$$

ランデン変換を k_1 、$k_2\cdots k_{n+1}$ まで繰り返すと $F(\alpha,k_0)$ は $F(\beta_{n+1},k_{n+1})$ を使って以下のように計算できる。

(5-7)　$$F(\beta_0,k_0)=\frac{2}{1+k_0}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n+1}}F(\beta_{n+1},k_{n+1})$$

上昇ランデン変換を k_1 、$k_2\cdots k_{n+1}$ の変換を繰り返すと $k_{n+1}=1$ に近づく。このとき(1-8)より

(5-8)　$$F(\beta_{n+1},1)=\int_0^{\beta_{n+1}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-1^2\sin\theta}}=\int_0^{\beta_{n+1}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=Ln\left(\frac{1+\sin\beta_{n+1}}{\cos\beta_{n+1}}\right)$$

第１種不完全楕円積分のランデン変換の数値計算式は以下のように定式化できる。

(5-9) $$F(\beta_0,k_0)=\frac{2}{1+k_0}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n+1}}Ln\left(\frac{1+\sin\beta_{n+1}}{\cos\beta_{n+1}}\right)$$

命題 5-2 第１種不完全楕円積分の下降ランデン変換の恒等式

(5-10) $$F(\alpha,k)=\frac{1+k}{2}F\left(\beta,\frac{1-k'}{1+k}\right)$$

命題 5-3 第１種不完全楕円積分のガウス変換の式

(5-11) $$\sin\alpha=\frac{(1+k)\sin\beta}{1+k\sin^2\beta}$$

５．２　数値計算例

5.2.1 計算手順

1）$k_0=k$ 、$\beta_0=\alpha$ として(5-4)、(5-5)式の変換を繰り返し k_1 、$k_2 \cdots k_{n+1}=1$ になるまで順次 k_n 、β_n を計算する。

2）(5-9)から $F(\beta_0,k_0)$ を計算し求める。

5.2.2 計算例

$\alpha=20°$ 、$k_0=0.1$ の場合

(5-4)、(5-5)、(5-9)より

n	k_n	β (rad)	$F(\beta_n,k_n)$
0	0.100000000000000	0.349065850398866	0.349135067214681
1	0.574959574576069	0.191637268185036	0.192024286968074
2	0.962895683726437	0.150683924708349	0.151215244655756
3	0.999821325230250	0.147868249661626	0.148409875524210
4	0.999999996008703	0.147854942395531	0.148396616974041
5	1.000000000000000	0.147854942098295	0.148396616677894

$\alpha = 45°$、$k_0 = 0.5$の場合

(5−4)、(5−5)、(5−9)より

n	k_n	β (rad)	$F(\beta_n, k_n)$
0	0.500000000000000	0.785398163397448	0.804366101232065
1	0.942809041582063	0.573382643652078	0.603274575924049
2	0.999566630206701	0.555128177423800	0.586023650330914
3	0.999999976513650	0.554993804248933	0.585896667856808
4	1.000000000000000	0.554993796968196	0.585896660976521

$\alpha = 85°$、$k_0 = 0.9$の場合

(5−4)、(5−5)、(5−9)より

n	k_n	β (rad)	$F(\beta_n, k_n)$
0	0.900000000000000	1.483529864195180	2.081412314252920
1	0.998613997947909	1.297752526443100	1.977341698540270
2	0.999999759541600	1.295299337840730	1.975971398714340
3	0.999999999999993	1.295298912530170	1.975971161144880
4	1.000000000000000	1.295298912530150	1.975971161144880

6. ランデン変換による第2種不完全楕円積分の数値計算方法

6.1　定式化

命題 6-1　第2種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の恒等式、
k を母数、k' を補母数という。

(6-1)　$$E(\alpha,k)=\frac{2E\left(\beta,\kappa\right)+2k'F\left(\beta,\kappa\right)}{1+\kappa'}-k\sin\alpha$$

(6-2)　$$\kappa=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\text{、}k'=\sqrt{1-k^2}\text{、}\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}$$

(6-3)　$$k\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)\quad\text{または}\quad\tan\alpha=\frac{\sin\beta}{k+\cos2\beta}$$

補題 6-1　第2種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の定式化

(6-1)式で n 回目のランデン変換の母数を k_n とすると、k_{n+1} は次式となる。

(6-4)　$$k_{n+1}=\frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$$

(6-3)より

(6-5)　$$\beta_{n+1}=\frac{\sin^{-1}(k_n\sin\beta_n)+\beta_n}{2}$$

$E(\beta_n,k_n)$ は(6-1)、(6-2)より

(6-6)　$$E(\beta_n,k_n)=\frac{2E\left(\beta_{n+1},k_{n+1}\right)+2k_{n+1}'F\left(\beta_{n+1},k_{n+1}\right)}{1+k_{n+1}'}-k_n\sin\beta_n$$

上昇ランデン変換は、k_1、$k_2\cdots k_{n+1}$ の変換を繰り返すと $k_{n+1}=1$ に近づく。
このとき $E(\beta_{n+1},k_{n+1})$ は（1-X）式より

(6-7)　$$E(\beta_{n+1},1)=\int_0^{\beta_{n+1}}\sqrt{1-1^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\beta_{n+1}}\cos\theta\cdot d\theta=\sin\beta_{n+1}$$

６．２ 数値計算例

６．２．１ 計算手順

1）$k_0 = k$ 、$\beta_0 = \alpha$ として(6−4)、(6−5)式の変換を繰り返し k_1 、$k_2 \cdots k_{n+1} \approx 1$ になるまで順次 k_n 、β_n を計算する。

2）5章の手順で、第 1 種不完全楕円積分 $F(\beta_{n+1}, k_{n+1}) \sim F(\alpha, k_0)$ を計算する。

3）$E(\beta_{n+1}, k_{n+1}) = \sin\beta_{n+1}$ として、(6−6)式から順次 $E(\beta_n, k_n) \sim E(\alpha, k_0)$ を計算する。

（参考） Excel で計算する場合、$k_n{}'$ の計算に関して $k_n{}' = \sqrt{1 - k_n{}^2}$ を用いるより以下の式を用いた方が、誤差が小さくなる。

(6−8) $$k_n{}' = \frac{1 - k_{n-1}}{1 + k_{n-1}}$$

６．２．２ 計算例

$\alpha = 20°$ $k_0 = 0.1$ の場合

(6−4)、(6−5)式より

n	k_n	β(rad)	$\sin\beta_n$
0	0.100000000000000	0.349065850398866	0.342020143325669
1	0.574959574576069	0.191637268185036	0.190466445417934
2	0.962895683726437	0.150683924708349	0.150114342441915
3	0.999821325230250	0.147868249661626	0.147329981439907
4	0.999999996008703	0.147854942395531	0.147316819377695
5	1.000000000000000	0.147854942098295	0.147316819083703

5 章および(6−6)、(6−7)より

n	$F(\beta_n,k_n)$	$E(\beta_n,k_n)$
0	0.349135067214681	0.348996658054424
1	0.192024286968074	0.191251649196112
2	0.151215244655756	0.150155957983374
3	0.148409875524210	0.147330174407200
4	0.148396616974041	0.147316819382005
5	0.148396616677894	0.147316819083703

$E(20°, 0.1) = 0.348996658054424$

高精度計算サイトでの計算結果（22 桁）：**0.3489966580544240876268**

$\alpha = 45°$　$k_0 = 0.5$ の場合

(6−4)、(6−5)式より

n	k_n	β(rad)	$\sin\beta_n$
0	0.500000000000000	0.785398163397448	0.707106781186547
1	0.942809041582063	0.573382643652078	0.542476806985263
2	0.999566630206701	0.555128177423800	0.527052233923228
3	0.999999976513650	0.554993804248933	0.526938034421628
4	1.000000000000000	0.554993796968196	0.526938028233703

5 章および(6−6)、(6−7)より

n	$F(\beta_n, k_n)$	$E(\beta_n, k_n)$
0	0.804366101232065	0.767195985711124
1	0.603274575924049	0.546074725561582
2	0.586023650330914	0.527077797097332
3	0.585896667856808	0.526938035806351
4	0.585896660976521	0.526938028233703

$E(45°, 0.5) = 0.76719598571112\underline{4}$

高精度計算サイトでの計算結果（22 桁）: 0.7671959857111122677205

7．第１種楕円積分のランデン変換式の導出

7．1　第１種不完全楕円積分の導出

命題7-1　第1種不完全楕円積分のランデン変換の恒等式、
k を母数、k' を補母数という。

(7-1)　$$F(\alpha,k)=\frac{2}{1+k}F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

(7-2)　$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

(7-3)　$$k\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)\quad\text{または}\quad\tan\alpha=\frac{\sin\beta}{k+\cos 2\beta}$$

証明
(7-3)をθ、ϕの関数として整理します。

(7-4)　$$k\sin\theta=\sin(2\phi-\theta)=\sin2\phi\cos\theta-\cos2\phi\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow\quad k\sin\theta-\cos2\phi\sin\theta=\sin2\phi\cos\theta-\cos2\phi\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\theta=\frac{\sin2\phi\cos\theta}{k+\cos2\phi}$$

ゆえに

(7-8)　$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{\sin2\phi}{k+\cos2\phi}$$

三角関数の公式を使って(7-8)から$\sin\theta$、$\cos\theta$の式に変換します。

(7-9)　$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(k+\cos2\phi)^2}{\sin^2 2\phi}+1}}=\frac{\sin2\phi}{\sqrt{1+k^2+2k\cos2\phi}}$$

(7-10)　$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 2\phi}{(k+\cos2\phi)^2}+1}}=\frac{k+\cos2\phi}{\sqrt{1+k^2+2k\cos2\phi}}$$

ここで、

(7-11)　$$\varsigma=1+k^2+2k\cos2\phi$$
$$=1+k^2+2k(1-\sin^2\phi)\quad\text{（半角の公式を使って）}$$
$$=(1+k)^2-4k\sin^2\phi$$

(7-9)、(7-10)は

(7-12)　$$\sin\theta=\frac{\sin2\phi}{\sqrt{\varsigma}}$$

(7-13)　　　$$\cos\theta = \frac{k+\cos 2\phi}{\sqrt{\varsigma}}$$

(7-12)の両辺をϕで微分します。

(7-14)　　　$$\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma}}(2\cos 2\phi)+\sin 2\phi\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}\right)(-4k\sin 2\phi)$$

$$= \frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}(\varsigma\cos 2\phi + k\sin^2 2\phi)$$

$$= \frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}\left[(1+k^2+2k\cos 2\phi)\cdot\cos 2\phi + k\sin^2 2\phi\right]$$

$$= \frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}\left[k\cos^2 2\phi + (1+k^2)\cdot\cos 2\phi + k\right]$$

$$= \frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}(k+\cos 2\phi)(1+k\cos 2\phi)$$

ゆえに

(7-15)　　　$$d\theta = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}(k+\cos 2\phi)(1+k\cos 2\phi)\cdot d\phi$$

(7-11)より

$$= \frac{\sqrt{\varsigma}}{k+\cos 2\phi}\cdot\frac{2}{\varsigma\sqrt{\varsigma}}(k+\cos 2\phi)(1+k\cos 2\phi)\cdot d\phi$$

(7-16)　　　$$= \frac{2(1+k\cos 2\phi)}{\varsigma}\cdot d\phi$$

定義(1-X)より

(7-17)　　　$$F(\alpha,k) = \int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

ここで(7-17)をθからϕへ変換します。(7-9)を代入すると

(7-18)　　　$$\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} = \sqrt{1-k^2\frac{\sin^2 2\phi}{\varsigma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varsigma - k^2\sin^2 2\phi}{\varsigma}} = \sqrt{\frac{1+k^2+2k\cos 2\phi - k^2(1-\cos^2 2\phi)}{\varsigma}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+2k\cos 2\phi+k^2\cos^2 2\phi}{\varsigma}}=\sqrt{\frac{(1+k\cos 2\phi)^2}{\varsigma}}$$

(7−19)
$$=\frac{1+k\cos 2\phi}{\sqrt{\varsigma}}$$

(7−17)に(7−16)、(7−19)を代入して整理すると

(7−20)
$$F(\alpha,k)=\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$
$$=\int_0^\beta \frac{\sqrt{\varsigma}}{1-k^2\cos 2\phi}\cdot\frac{2(1+k\cos 2\phi)}{\varsigma}d\phi$$
$$=2\int_0^\beta \frac{d\phi}{\sqrt{\varsigma}}$$

(7−11)より

$$=2\int_0^\beta \frac{d\phi}{\sqrt{(1+k)^2-4\sin^2\phi}}$$

$$=\frac{2}{1+k}\int_0^\beta \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{4k}{(1+k)^2}\sin^2\phi}}$$

ゆえに、第 1 種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の式を得る。

(7−1)再
$$F(\alpha,k)=\frac{2}{1+k}F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

(7−1)において

(7−12)
$$\kappa=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

(7−13)
$$F(\alpha,k)=\frac{2}{1+k}F(\beta,\kappa)\ \Leftrightarrow\ F(\beta,\kappa)=\frac{1+k}{2}F(\alpha,k)$$

(7−12)を k の式とすると

(7−14)
$$\kappa=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}=\frac{\sqrt{(1+k)^2-(1-k)^2}}{1+k}=\sqrt{1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2}$$

ゆえに、補母数の定義(7−2)から

(7−15)
$$\kappa'=\frac{1-k}{1+k}\ \Leftrightarrow\ k=\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}$$

(7−13)式から第 1 種不完全楕円積分の下降ランデン変換の式を得る。

(7-16) $$F(\beta,\kappa)=\frac{1+k}{2}F\left(\alpha,\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)$$

(7-17) $$k=\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'} \quad 、\quad \kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}$$

7．2 第１種完全楕円積分の導出

命題7-2 第1種完全楕円積分のランデン変換の恒等式、
κを母数、κ'を補母数という。

(3-1)再 $$K(\kappa)=\frac{2}{1+\kappa'}K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)$$

(3-2)再 $$\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}$$

証明
(7-16)において

(7-18) $$\frac{1+k}{2}=\frac{1+k}{1+k+1-k}=\frac{1}{1+\dfrac{1-k}{1+k}}=\frac{1}{1+\kappa'}$$

(7-4)より

(7-19) $$\beta=\frac{\sin^{-1}(k\sin\alpha)+\alpha}{2}$$

(7-19)でβが0から$\dfrac{\pi}{2}$まで動くとき、αは0からπの範囲で動きます。

従って、第１種不完全楕円積分範囲をαを0からπまでとすると、第１種完全楕円積分は、以下のようになる。

(7-20) $$F(\alpha,k)=F(\pi,k)=2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=2K(k)$$

同様に、第１種不完全楕円積分範囲をβを0から$\dfrac{\pi}{2}$までとすると、第１種完全楕円積分は、以下のようになる。

(7-21) $$F(\beta,\kappa)=F(\frac{\pi}{2},\kappa)=K(\kappa)$$

(7-16)に(7-20)、(7-21)を代入し、(7-18)で置き換えると

(7-22) $$K(\kappa)=(1+k)K(k) \quad\Leftrightarrow\quad K(\kappa)=\frac{2}{1+\kappa'}K(k)$$

(7-17)より第１種完全楕円積分の下降ランデン変換の式を得る。

(3-1)再 $$K(\kappa)=\frac{2}{1+\kappa'}K\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right)$$

8. 第2種完全楕円積分のランデン変換式の導出

第2種完全楕円積分のランデン変換の(4-2)式を導出する。導出のためには、第 1 種完全楕円積分の微分を糸口に導出する。

8. 1 第2種完全楕円積分の導出

補題8－1 第 1 種完全楕円積分の微分 [4]p864 式 8.123 2

(8-7) $$\frac{dK(k)}{dk}=\frac{1}{kk'^2}(E(k)-k'^2K(k))$$

証明

(8-11) $$\frac{dK(k)}{dk}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dk}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\cdot d\theta=\frac{k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right)\sin\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{k}{k'^2}\left[-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\cos\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\theta+k^2-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\cdot d\theta-\frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k'^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{kk'^2}(E(k)-k'^2K(k))$$

命題8-1 第2種不完全楕円積分のランデン変換の恒等式、
k を母数、k' を補母数という。

(4-1)再 $$E(k)=(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k)$$

(4-2)再 $$k'=\sqrt{1-k^2}$$

証明

(4-1)で

(8−1) $\xi=\dfrac{1-k'}{1+k'}$

(4−2)をkで微分すると

(8−2) $\dfrac{dk'}{dk}=-\dfrac{k}{k'}$

ξをkで微分すると

(8−3) $\dfrac{d\xi}{dk}=\dfrac{d\xi}{dk'}\cdot\dfrac{dk'}{dk}=\dfrac{-2}{(1+k')^2}\cdot\dfrac{-k}{k}=\dfrac{2k^2}{(1-k')^2k'k}=\dfrac{2(1-k'^2)}{(1-k')^2k'k}$

$$=\frac{2(1-k')}{(1+k')k'k}=\frac{2\xi}{k'k}$$

$G(\xi)=K(\xi)$とおいて、第 1 種完全楕円積分のランデン変換から

(3−1)再 $K(k)=\dfrac{2}{1+k'}K\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)$

(8−5) $(1+k')K(k)=2G(\xi)$

(8−5)をkで微分すると

(8−6) $-\dfrac{k}{k'}K(k)+(1+k')\dfrac{dK(k)}{dk}=2\dfrac{dG(\xi)}{dk}\dfrac{2\xi}{kk'}$

補題 8−1 より

(8−7) $\dfrac{dK(k)}{dk}=\dfrac{1}{kk'^2}(E(k)-k'^2K(k))$

(8−6)、(8−7)より

(8−9)

$$-\frac{k}{k'}K(k)+(1+k')\frac{1}{kk'^2}(E(k)-k'^2K(k))=2\frac{1}{\xi\xi'^2}(E(\xi)-\xi'^2G(\xi))\frac{2\xi}{kk'}$$

(8−10) $\dfrac{1+k'}{kk'^2}E(k)=\left(\dfrac{1+k'}{k}+\dfrac{k}{k'}\right)K(k)+\dfrac{4}{kk'\xi^2}(E(\xi)-\xi'^2G(\xi))$

(8−5)式より

$$=\frac{k'+k'^2+k^2}{kk'}K(k)+\frac{4}{kk'\xi^2}E(\xi)-\frac{2(1+k')}{kk'}K(k)$$

$$=\frac{1+k'}{kk'}K(k)+\frac{4}{kk'\xi^2}E(\xi)-\frac{2(1+k')}{kk'}K(k)$$

$$=\frac{(1+k')^2}{kk'^2}E(\xi)-\frac{1+k'}{kk'}K(k)$$

よって、第2種完全楕円積分のランデン変換の恒等式を得る。

(4−1)再 $E(k)=(1+k')E\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k)$

9．第2種不完全楕円積分のランデン変換式の導出

定義 9-1　次の式が第2種不完全楕円積分の上昇ランデン変換の恒等式である。
k を母数、k' を補母数という。

(6-1) 再　$$E(\alpha,k)=\frac{2E(\beta,\kappa)+2k'F(\beta,\kappa)}{1+\kappa'}-k\sin\alpha$$

(6-2) 再　$$\kappa=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\text{、}k'=\sqrt{1-k^2}\text{、}\kappa'=\sqrt{1-\kappa^2}$$

(6-3) 再　$$k\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)\quad\text{または}\quad\tan\alpha=\frac{\sin\beta}{k+\cos2\beta}$$

証明

第 1 種不完全楕円積分のランデン変換の式は以下となる

(9-1)　$$(1+k')F(\beta,k)=F\left(\alpha,\frac{1-k'}{1+k'}\right)$$

(9-2)　$$\sin\alpha=\frac{(1+k')\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

ここで簡単のため以下のように置き換えます。

(9-3)　$$F=F(\beta,k)\text{、}G=F(\alpha,\xi)\text{、}E=E(\beta,k)\text{、}\hat{E}=E(\alpha,\xi)$$

(9-4)　$$\xi=\frac{1-k'}{1+k'}$$

そうすると、(9-1)式は以下のようになります。

(9-5)　$$(1+k')F=G$$

(9-5)式の両辺を k で微分します。

(9-6)　$$-\frac{k}{k'}F+(1+k')\frac{\partial F}{\partial k}=\frac{\partial G}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial k}+\frac{\partial G}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial k}$$

(9-6)式を展開するため、それぞれの微分を計算します。[4]p864　式 8.123

(9-7)　$$\frac{\partial F}{\partial k}=\frac{1}{k'^2}\left(\frac{E-k'^2F}{k}-\frac{k\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right)$$

(9-8)　$$\frac{\partial G}{\partial k}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}$$

(9-9)
$$\frac{\partial\alpha}{\partial k}=\frac{k\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}-\frac{1}{k'(1+k')}\right)$$

(9-10)
$$\frac{\partial G}{\partial\xi}=\frac{1}{\xi'^2}\left(\frac{\hat{E}-\xi'^2G}{\xi}-\frac{\xi\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}\right)$$

(9-11)
$$\frac{\partial\xi}{\partial k}=\frac{2\xi}{kk'}$$

(9-12)
$$\cos\alpha=\frac{1-(1+k')\sin^2\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

(9-13)
$$\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}=\frac{1-(1-k')\sin^2\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

(9-6)に、(9-7)から(9-11)式を代入して整理すると、展開式が出来ます。

(9-14)
$$-\frac{k}{k'}F+(1+k')\frac{1}{k'^2}\left(\frac{E-k'^2F}{k}-\frac{k\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}\frac{k\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}-\frac{1}{k'(1+k')}\right)$$
$$+\frac{1}{\xi'^2}\left(\frac{\hat{E}-\xi'^2G}{\xi}-\frac{\xi\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}\right)\frac{2\xi}{kk'}$$

(9-14)式を整理する。

(9-15)
$$\hat{E}=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F$$
$$-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha\times\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}\left[\frac{1-k'}{1+k'}\cos\alpha+\frac{2k'}{(1+k')\cos\alpha}\left(\frac{1-(1+k')\sin^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}\right)\right]$$

(9-12)式をより

(9-16)
$$\hat{E}=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F$$

$$-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha\times\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}\left[\frac{1-k'}{1+k'}\cos\alpha+\frac{2k'}{(1+k')\cos\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right)\right]$$

(9-12)、(9-13)式をより

(9-17) $$\hat{E}=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F$$

$$-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha\times\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}{1-(1-k')\sin^2\beta}\left[\frac{(1-k')(1-(1+k')\sin^2\beta)}{(1+k')\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}+\frac{2k'}{(1+k')\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right]$$

(9-17)を整理すると

(9-18) $$\hat{E}=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha\times\left[\frac{(1-k')(1-(1+k')\sin^2\beta)+2k'}{(1+k')(1-(1-k')\sin^2\beta)}\right]$$

$$=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha\times\left[\frac{(1+k')-(1-k'^2)\sin^2\beta)}{(1+k')-(1-k'^2)\sin^2\beta)}\right]$$

$$=\frac{2}{1+k'}E+\frac{2k'}{1+k'}F-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha$$

(9-3)より(9-18)は、下降ランデン変換となる。

(9-19) $$E\left(\alpha,\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{2E(\beta,k)+2k'F(\beta,k)}{1+k'}-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\alpha$$

ここで、

(9-20) $$\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}\quad\Leftrightarrow\quad k'=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$$

(9-21) $$\frac{2}{1+k'}=(1+\lambda)\qquad\frac{2k'}{1+k'}=(1-\lambda)$$

(9-19)に代入する

(9-22) $$E(\alpha,\lambda)=(1+\lambda)E\left(\beta,\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\right)+(1-\lambda)F\left(\beta,\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\right)-\lambda\mathrm{s\ i}\ \alpha$$

λをkに置き換えると上昇ランデン変換の式となる

(9-23) $$E(\alpha,k)=(1+k)E\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+(1-k)F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)-k\mathrm{s\ i}\ \alpha$$

また、(6−1)の式の形に変換すると

(9−24) $$\kappa = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa' = \sqrt{1-\kappa^2} = \frac{1-k}{1+k}$$

(9−25) $$1+\kappa' = 1+\frac{1-k}{1+k} = \frac{2}{1+k}\text{、}\quad \frac{1+\kappa'}{\kappa'} = \frac{1+k}{1-k}+1 = \frac{2}{1-k}$$

(9−25)より

(9−26) $$E(\alpha,k) = \frac{2E\left(\beta,\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+2\kappa' F\left(\beta,\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{1+\kappa'} - k\sin\alpha$$

9章　付録

(A9−1)
$$(1+k')F(\beta,k)=F\left(\alpha,\frac{1-k'}{1+k'}\right)$$

(A9−2)
$$\sin\alpha=\frac{(1+k')\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

(A9−3)
$$\xi=\frac{1-k'}{1+k'}$$

(A9−4)
$$\xi'=\sqrt{1-\xi^2}$$

(A9−5)
$$\xi'^2=\frac{4k'}{(1+k')^2}、\ \xi'=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

(A9−6)
$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{1-k'}{2\sqrt{k'}}$$

(A9−7)
$$\frac{dk'}{dk}=\frac{d(1-k^2)^{\frac{1}{2}}}{dk}=-2k\frac{1}{2}(1-k^2)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{k}{k'}$$

(A9−8)
$$\frac{\partial\xi}{\partial k}=\frac{d\xi}{dk'}\frac{dk'}{dk}=\frac{-2}{(1+k')^2}\frac{-k}{k'}=\frac{-2k^2}{(1+k')^2k'k}$$
$$=\frac{-2(1-k'^2)}{(1+k')^2k'k}=\frac{-2(1-k')}{(1+k')k'k}=\frac{2\xi}{kk'}$$

(A9−9)
$$\frac{\partial G}{\partial\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}}$$

(A9−10)
$$\frac{\partial\alpha}{\partial k}=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{k(1+k')\sin^3\beta\cos\beta}{(1-k^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{k\sin\beta\cos\beta}{k'\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{k\sin^2\beta(1+k')\sin\beta\cos\beta}{(1-k^2\sin^2\beta)\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}-\frac{k(1+k')\sin\beta\cos\beta}{k'(1+k')\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{k\sin^2\beta\sin\alpha}{1-k^2\sin^2\beta}-\frac{k\sin\alpha}{k'(1+k')}\right)$$

$$=\frac{k\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}-\frac{1}{k'(1+k')}\right)$$

(A9-11)
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(1+k')^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-k'^2\sin^2\beta-(1+k')^2\sin^2\beta(1-\cos^2\beta)}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-2\sin^2\beta-2k'\sin^2\beta+\sin^4\beta+2k'\sin^4\beta+k'^2\sin^4\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-2(1+k')\sin^2\beta+(1+k')^2\sin^4\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-(1+k')\sin^2\beta)^2}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \frac{1-(1+k')\sin^2\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

(A9-12)
$$\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(1-k')^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-k^2\sin^2\beta-(1-k')^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-2\sin^2\beta+2k'\sin^2\beta+\sin^4\beta-2k'\sin^4\beta+k'^2\sin^4\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-2(1-k')\sin^2\beta+(1-k')^2\sin^4\beta}{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-(1-k')\sin^2\beta)^2}{1-k^2\sin^2\beta}} = \frac{1-(1-k')\sin^2\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

10.超幾何級数による第1種完全楕円積分のランデン変換の導出

第１種完全楕円関数積分はガウスの超幾何級数を使って以下のように表すことができます。[2] p110

(10-1) $$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$

超幾何級数は、以下のように変換できます。[1] p560, 式(15.3.17)

(10-2) $$F(a,b,2b;z) =\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{-2a}$$

$$\times F\left[a,a-b+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2};\left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right]$$

(10-2)式に(10-1)式を代入すると

(10-3) $$k(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}\right)^{-2\times\frac{1}{2}}F\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}\right)^{-1}F\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}F\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)F\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$

ここで

(10-4) $$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$$

とすると、(10-3)は以下のようになる。

(10-5) $$K(k)=\frac{\pi}{2}(1+k_1)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;{k_1}^2\right)$$

(10−5)式は、(10−1)より以下のようになりランデン変換(3−2)、(3−3)を求めることができます。

(10−7) $$K(k)=(1+k_1)K(k_1)$$

11．算術幾何平均による完全楕円積分の計算

11．1算術幾何平均よる第 1 種完全楕円積分ランデン変換式の導出

第 1 種完全楕円積分は、楕円の径a、bを用いて、(1−9)式より以下に示される。

(1−9 再)
$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

ここで、第 1 種完全楕円積分の$K(k)$と$I(a,b)$の関係を求める。(1−9 再)より

(11−1)
$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)+b^2\sin^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}}$$

ここで

(1−5 再)
$$k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

とすると

(11−2)
$$I(a,b)=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}K(k)$$

$a=1$、$b=k'$とすると

(11−3)
$$I(1,k')=K(k)$$

(1−5 再)に$a=1$、$b=k'$を代入すると

(1−13 再)
$$k=\sqrt{1-k'^2}$$

算術幾何平均で第 1 種完全楕円積分は次式の関係があるので

(11−4)
$$I(a,b)=I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$$

(11−4)を(11−3)に適用すると次式になる。

(11−5)
$$K(k)=I(1,k')=I\left(\frac{1+k'}{2},\sqrt{k'}\right)$$

ここで$a=\dfrac{1+k'}{2}$、$b=\sqrt{k'}$とおくと(11−2)より

(11−6) $$I\left(\frac{1+k'}{2},\sqrt{k'}\right)=\frac{2}{1+k'}K(\kappa)$$

(11−5)と(11−6)を整理すると、以下の変換式ができる。

(11−7) $$K(k)=\frac{2}{1+k'}K(\kappa)$$

ここでκは、(1−5 再)より$a=\dfrac{1+k'}{2}$、$b=\sqrt{k'}$を代入すると

(11−8) $$\kappa=\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{k'}\right)^2}{\left(\dfrac{1+k'}{2}\right)^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right)^2}=\sqrt{\frac{\left(1+k'\right)^2-4k'}{(1+k')^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{k'^2-2k'+1}{(1+k')^2}}=\sqrt{\frac{(1-k')^2}{(1+k')^2}}=\frac{1-k'}{1+k'}$$

(11−8)を(11−7)に代入すると定義 3−1 の(3−1)式の第 1 種完全楕円積分のランデン変換式をとなる。

(3−1 再) $$K(k)=\frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$$

11．2 算術幾何平均を用いた第１種完全楕円積分の数値計算方法

算術幾何平均を直接用いて、第１種完全楕円積分を計算できる。楕円の径a、bとすると、第１種完全楕円積分とは以下の関係がある。

(11-2 再)　$$I(a,b)=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}K(k)$$

$I(a,b)$は算術幾何平均に対して

(11-4 再)　$$I(a,b)=I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})$$

上記を用いて、計算式を導出する。まず、(11-4)を数列に変換する、

(11-9)　$$I(a_n,b_n)=I(a_{n+1},b_{n+1})$$

ここで

(11-10)　$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\text{、}b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

(11-2)より

(11-11)　$$I(a_{n+1},b_{n+1})=\frac{1}{a_{n+1}}K(k_{n+1})$$

(1-5)より

(11-12)　$$k_{n+1}=\sqrt{1-\frac{{b_{n+1}}^2}{{a_{n+1}}^2}}$$

初期値を$a_0=1$、$b_0=k_0'$として、(11-10)より順次a_{n+1}、b_{n+1}を計算する。同時に

(11-12)よりk_{n+1}を計算し$k_{n+1}\approx 0$であれば$K(k_{n+1})=\frac{\pi}{2}$とし(11-11)より

(11-13)　$$I(a_{n+1},b_{n+1})=\frac{\pi}{2a_{n+1}}$$

(11-9)より以下の関係は容易に推察できるので

(11-13)　$$I(a_0,b_0)=I(a_{n+1},b_{n+1})$$

$a_0=1$だから

(11-14)　$$K(k_0)=a_0\cdot I(a_0,b_0)=\frac{\pi}{2a_{n+1}}$$

11．3　算術幾何平均を用いた第2種完全楕円積分の数値計算方法

第2種完全楕円積分は楕円の径a、bとすると、以下の関係がある。

(1-12 再)　$$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}\cdot d\theta=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta=aE(k)$$

$J(a,b)$は算術幾何平均に対して

(11-15)　$$J(a,b)=2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)-ab\cdot I(a,b)$$

まず、(11-15)を数列に変換する。

(11-16)　$$J(a_n,b_n)=2J\left(a_{n+1},b_{n+1}\right)-a_nb_n\cdot I(a_n,b_n)$$

(11-9)より(11-16)は次式となる。

(11-17)　$$J(a_n,b_n)=2J\left(a_{n+1},b_{n+1}\right)-a_nb_n\cdot I(a_{n+1},b_{n+1})$$

(11-2)、(11-12)より

(11-18)　$$J(a_n,b_n)=2a_{n+1}E(k_{n+1})-a_nb_n\cdot\frac{K(k_{n+1})}{a_{n+1}}$$

なお、k_{n+1}は

(11-5 再)　$$k_{n+1}=\sqrt{1-\frac{{b_{n+1}}^2}{{a_{n+1}}^2}}$$

ここで、算術幾何平均より

(11-19)　$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\text{、}b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

初期値を$a_0=1$、$b_0=k_0'$として、(11-19)より順次a_{n+1}、b_{n+1}を計算する。同時に(11-5)よりk_{n+1}を計算し$k_{n+1}\approx 0$であれば$K(k_{n+1})=\frac{\pi}{2}$、$E(k_{n+1})=\frac{\pi}{2}$となるので、(11-18)は以下の式となる。

(11-20)　$$J(a_n,b_n)=\left(a_{n+1}-\frac{a_nb_n}{2a_{n+1}}\right)\pi$$

(11-20)を用いて、(11-17)より順次nを小さくしながら、$J(a_0,b_0)$を計算すれば$E(k_0)$を求めることが出来る。

11．4 算術幾何平均を用いた第１種、第2種完全楕円積分の計算結果

算術幾何平均を用いた数値計算結果を示します。高精度計算サイトの計算結果と比較して 12 桁程度の計算精度があります。計算結果で下線を引いたところが一致しなかったところです。

	K(k)		*E(k)*	
k	**高精度計算サイト**	**計算結果**	**高精度計算サイト**	**計算結果**
0.1	***1.57474556151735 5952669***	***1.5747455615173 6***	***1.56686194202166 829122***	***1.5668619420216 7***
0.5	***1.68575035481259 6042871***	***1.685750354812 60***	***1.46746220933942 715546***	***1.4674622093394 3***
0.9	***2.28054913842277 0204614***	***2.28054913842277***	***1.17169705278161 414118***	***1.1716970527816 2***
0.99	***3.35660052336119 2376033***	***3.35660052336119***	***1.02847580902880 400098***	***1.0284758090288***
0.9999	***5.64514821682969 2788003***	***5.645148216829 87***	***1.00051450008378 117956***	***1.00051450008378***

12. マクローリン展開による第１種完全楕円積分の展開式の導出

第１種完全楕円積分の被積分関数は以下の形の式である。

(12-1) $$f^{(n)}(X)=\frac{1}{\sqrt{1-aX}}=(1-aX)^{-\frac{1}{2}}$$

$$a=\sin^2\theta \quad X=k^2$$

X^s のｎ回微分は、以下の式となる。

(12-2) $$(X^s)^{(n)}=s(s-1)(s-2)\cdot\cdot(s-n+1)X^{s-n}$$

(12-2)に、$s=-\frac{1}{2}$ を代入すると

(12-3) $$(X^{-\frac{1}{2}})^{(n)}=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdot\cdot(-\frac{1}{2}-n+1)X^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot\cdot(-\frac{2n-1}{2})X^{-\frac{2n+1}{2}}$$

(12-3)を(12-1)に適用すると以下の式になる。

(12-4) $$(1-aX^{-\frac{1}{2}})^{(n)}=(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot\cdot(-\frac{2n-1}{2})(-a)^n(1-aX)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

ｎが偶数のとき$(-a)^n$は正であり、ｎが奇数のときは$(-a)^n$ 負である。
上式の符号は偶数回微分のときは、正であり、奇数回微分のときは負である
よって、符号は常に正になる。
符合に注意して(12-4)を整理すると以下の式になる。

(12-5) $$(1-aX^{-\frac{1}{2}})^{(n)}=(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\cdot\cdot(\frac{2n-1}{2})(a)^n(1-aX)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^n(1-aX)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

マクローリン展開の公式は以下の式である。[5] p110

(12-6) $$f(X)=f(0)+f'(0)X+\frac{f''(0)X^2}{2!}+\cdot\cdot\cdot+\frac{f^{(n)}(0)X^n}{n!}$$

(12-6)に(12-5)を代入すると以下の式になる。

(12-7)

$$f(X)=1+\frac{1}{2}aX+\frac{(2\times2-1)!!}{2^2 2!}a^2X^2+\frac{(2\times3-1)!!}{2^3 3!}a^3X^3+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}a^nX^n$$

第 1 種完全楕円積分は以下の式となる。

(1-7 再)　　$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

(12-7)式を(1-7)に適用する。

(12-8)　$$K(k)=\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}aX+\frac{3}{2^2 2!}a^2X^2+\frac{5\times3}{2^3 3!}a^3X^3+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)}{2^n n!}a^nX^n+\cdot\cdot\cdot\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{2^2 2!}k^4\sin^4\theta+\frac{5\times3}{2^3 3!}k^6\sin^6\theta+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)}{2^n n!}k^{2n}\sin^{2n}\theta+\cdot\cdot\cdot\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{2^2 2!}k^4\sin^4\theta+\frac{5\times3}{2^3 3!}k^6\sin^6\theta+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)}{2^n n!}k^{2n}\sin^{2n}\theta+\cdot\cdot\cdot\right)d\theta$$

(12-8)の積分を、以下の積分公式を使って計算する。[5] p96

(12-9)　　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}xdx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}$$

以下(12-7)式の積分を行う。

(12-10)

$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}k^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2^2 2!}k^4\frac{3!!}{4!!}-\frac{5\times3}{2^3 3!}k^6\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}+\cdot\cdot\cdot$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{3}{2^2 2!}\frac{3!!}{4!!}k^4+\frac{15}{2^3 3!}\frac{5!!}{6!!}k^6+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\cdot\cdot\cdot+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}+\cdot\cdot\cdot\right)$$

ここで

(12-11)　　$$2^n n!=\{n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot3\times2\times1\}\times\{2\times2\times2\cdot\cdot\cdot\times2\times2\times2\}$$
$$=2n\times2(n-1)\times2(n-2)\cdot\cdot\cdot\times2\cdot3\times2\cdot2\times2\cdot1=2n!!$$

(12-11)を(12-10)に適用する。

(12-12)　　$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{576}k^6+\cdot\cdot\cdot+\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}^2k^{2n}+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$(-1)!!=1$として(12-12)を整理すると第 1 種完全楕円積分の展開式(2-1)となる。

(12-13)　　$$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}^2k^{2n}$$

13. 超幾何級数による第1種、第2種完全楕円関数の級数展開式の導出

13．1　第１種完全楕円積分の級数展開式

第１種完全楕円関数積分はガウスの超幾何級数を使って以下のように表すことができます。[2] p110、[3] p227

(10-1)再　$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$

超幾何級数は、以下のように展開できます。[1] p556，式(15.1.1)

(13-1)　$$F(a,b,2b;z)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots$$

(13-1)の超幾何級数の部分を(10-1)に適用します。

(13-2)　$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k_1{}^2\right)=1+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 1}k_1{}^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)(\frac{1}{2}+1)}{1\cdot 2\cdot 1(1+1)}k_1{}^4+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+1)(1+2)}k_1{}^6+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots$$

(13-2)に$\pi/2$を掛けると級数展開式を得る

(2-1) 再　$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right]$$

13．2　第2種完全楕円積分のランデン変換級数展開式

第2種完全楕円関数積分はガウスの超幾何級数を使って以下のように表すことができます。[2] p112、[3] p227

(13-3)
$$E(k)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$

超幾何級数は、以下のように変換できます。[1] p560, 式(15.3.17)

(13-4)
$$F(a,b,2b;z)\;=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{-2a}$$
$$\times F\left[a,a-b+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2};\left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right]$$

(13-4)式に(13-3)式を代入すると

(13-5)
$$E(k)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}\right)^{-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}F\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}\right)^{1}F\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;\left(\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2\right]$$

ここで

(13-6)
$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$$

とするとして、(11-5)の係数を変形する。

(13-7)
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}\;=\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}=\frac{1}{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{1-k^2}+1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}}=\frac{1}{1+k_1}$$

(13-5)の超幾何級数部分を展開します。

(13-1)再
$$F\left(a,b,2b;z\right)=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots$$

(13-5)、(13-6)を(13-1)に適用します。

(13-8)
$$F\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;{k_1}^2\right)=1+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 1}{k_1}^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}+1)}{1\cdot 2\cdot 1(1+1)}{k_1}^4+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+1)(1+2)}{k_1}^6+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2{k_1}^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2{k_1}^4+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2{k_1}^6+\cdots$$

ゆえに(13-7)、(13-8)より第 2 種完全楕円積分のランデン変換の級数展開式を求めることができます。[3] p228

(13-8)
$$E(k)=\frac{\pi}{2(1+k_1)}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2{k_1}^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2{k_1}^4+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2{k_1}^6+\cdots\right]$$

公式 [3] p227、228、[4]p864

第 1 種完全楕円積分のマクローリン展開式 (2−1)再

(A−1) $$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right]$$

第 1 種完全楕円積分のマクローリン展開式 の 2 回ランデン変換

(A−2)

$$K(k)=\frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2{k_2}^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2{k_2}^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2{k_1}^6+\cdots\right]$$

第 2 種完全楕円積分のマクローリン展開式 (2−15)再

(A−3) $$E(k)=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1}{2\cdot4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{k^6}{5}+\cdots\right]$$

第 2 種完全楕円積分のマクローリン展開式 のランデン変換

(A−4) $$E(k)=\frac{\pi}{2(1+k_1)}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2{k_1}^2+\left(\frac{1}{2\cdot4}\right)^2{k_1}^4+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\right)^2{k_1}^6+\cdots\right]$$

ただし (2−17)再

(A−5) $$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}=\frac{1-k'}{1+k'}=\left(\frac{k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}\right)^2$$

補母数(complementary modulus) (1−13)再

(A−6) $$k'=\sqrt{1-k^2}$$

第 1 種完全楕円積分の下降ランデン変換 (3−1)再

(A−7) $$K(k)=\frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)$$

第 2 種完全楕円積分の下降ランデン変換 (4−1)再

(A−8) $$E(k)=(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k)$$

第 1 種完全楕円積分の上昇ランデン変換 (3−4)再

(A−9) $$K(k)=\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

第 2 種完全楕円積分の上昇ランデン変換

(A−8) $$E(k)=\frac{1}{2}\left[(1+k)E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+k'^2K(k)\right]$$

第1種不完全楕円積分の上昇ランデン変換 (5−1)再 [3] p145、[4]p863

(A−9) $$F(\alpha,k)=\frac{2}{1+k}F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

第2種不完全楕円積分の上昇ランデン変換 (6−1)再 [3] p145、[4]p863

(A−10) $$E(\alpha,k)=\frac{2E\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+2k'F\left(\beta,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)}{1+k'}-k\sin\beta$$

第1種不完全楕円積分の下降ランデン変換 (7−16)再 [3] p145、[4]p863

(A−11) $$F\left(\alpha,\frac{1-k'}{1+k'}\right)=(1+k')F(\beta,k)$$

第 2 種不完全楕円積分の下降ランデン変換 (9−1)再 [3] p145、[4]p863

(A−12) $$E\left(\alpha,\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{2}{1+k'}\left[E(\beta,k)+k'F(\beta,k)\right]-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\beta$$

ただし ランデン変換は(5−3)再 (7−16)再 [3] p144 c) 、[4]p863

(A−13) $k\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)$ (上昇ランデン変換に使用)

$$\sin\alpha=\frac{(1+k')\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k^2\sin\beta}}$$ または $$\tan\alpha=\frac{\sin\beta}{k+\cos 2\beta}$$

(下降ランデン変換に使用)

ただし ガウス変換 [3] p145 d)、[4]p863

(A−14) $$\sin\alpha=\frac{(1+k)\sin\beta}{1+k\sin^2\beta}$$ または $$\cos\alpha=\frac{\cos\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}{1+k\sin^2\beta}$$

母数$\boldsymbol{k}$のランデン変換、起点を$\boldsymbol{k_0}$として上昇ランデン変換は$\boldsymbol{\kappa_u}$、下降ランデン変換は$\boldsymbol{\kappa_d}$とする

(A-15) $$\boldsymbol{\kappa_u = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}}$$ （上昇ランデン変換に使用）

(A-16) $$\boldsymbol{\kappa_d = \frac{1-k_0'}{1+k_0'} = \frac{1-\sqrt{1-k_0{}^2}}{1+\sqrt{1-k_0{}^2}}}$$ （下降ランデン変換に使用）

忘備録 （式の変換など）

■上昇ランデン変換の母数 k から下降ランデン変換の母数を導く
（A−15)から（A−16）への変換

(B−1) $$\kappa_u' = \sqrt{1-\kappa_u^2} = \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1+k_0)^2-4k_0}}{1+k_0} = \frac{1-k_0}{1+k_0}$$

(B−1)を k_0 の式に変換する。

(B−2) $$\kappa_u' = \frac{1-k_0}{1+k_0} \Leftrightarrow k_0 = \frac{1-\kappa_u'}{1+\kappa_u'}$$

(B−2)において、κ_u を起点と考え、κ_u を k_0 に、(B−2)の k_0 を κ_d 置き換えると(A−16)を得る

(A−16)再 $$\kappa_d = \frac{1-k_0'}{1+k_0'} = \frac{1-\sqrt{1-k_0^2}}{1+\sqrt{1-k_0^2}} \Leftrightarrow k_0' = \frac{1-\kappa_d}{1+\kappa_d}$$

■下降ランデン変換の母数 k から上昇ランデン変換の母数を導く
（A−15)から（A−16）への変換

(B−3) $$k_0 = \sqrt{1-k_0'^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1-\kappa_d}{1+\kappa_d}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1+\kappa_d)^2-(1-\kappa_d)^2}}{1+\kappa_d} = \frac{2\sqrt{\kappa_d}}{1+\kappa_d}$$

(B−3)において、κ_d を起点と考え、κ_d を k_0 に、(B−3)の k_0 を κ_u 置き換えると(A−15)を得る。

(A−15)再 $$\kappa_u = \frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}$$

■上昇ランデン変換の母数k　から下降ランデン変換の母数を導く
(A−15)から(A−16)への変換　(ちょっと強引に)

(B−4)　$$\kappa_u{}^2 = \frac{4k_0}{(1+k_0)^2} \quad \Leftrightarrow \quad k_0{}^2\kappa_u{}^2 + (2\kappa_u{}^2 - 4)k_0 + \kappa_u{}^2 = 0$$

(B−5)　$$k_0 = \frac{-(2\kappa_u{}^2 - 4) \pm \sqrt{(2\kappa_u{}^2 - 4)^2 - 4\kappa_u{}^2}}{2\kappa_u{}^2} = \frac{2 - \kappa_u{}^2 \pm 2\sqrt{1-\kappa_u{}^2}}{\kappa_u{}^2}$$

$\kappa_u{}' = \sqrt{1-\kappa_u{}^2}$ とおくと

(B−6)　$$k_0 = \frac{1-\kappa_u{}' \pm 2\kappa_u{}'}{1-\kappa_u{}^2} = \frac{(1 \pm \kappa_u{}')^2}{(1-\kappa_u)(1+\kappa_u)}$$

ゆえに

(B−7)　$$k_0 = \frac{1-\kappa_u{}'}{1+\kappa_u{}'} \quad \text{または} \quad k_0 = \frac{1+\kappa_u{}'}{1-\kappa_u{}'}$$

$0 \le k_0 \le 1$より

(B−8)　$$k_0 = \frac{1-\kappa_u{}'}{1+\kappa_u{}'}$$

(B−8)において、κ_uを起点と考え、κ_uをk_0に、(B−2)のk_0をκ_d置き換えると(A−16)を得る

(A−16)再　$$\kappa_d = \frac{1-k_0{}'}{1+k_0{}'} = \frac{1-\sqrt{1-k_0{}^2}}{1+\sqrt{1-k_0{}^2}}$$

参考文献

［1］ M.Abramowitz and I.A.Stegum : “Handbook of Mathematical Functions”, Dover(1965),p597-598

［2］ 渡辺力、名取亮、小国勉 ：“Fortran 77 による数値計算ソフトウエア”、丸善 (1989)、p108-112

［3］ 守口繁一、宇田川銈久、一松信 ：“岩波数学公式 Ｉ”、岩波書店（1956） p144-145

［4］ D.Zwillinger and A.Jeffry : “Table of Integrals, Series, and Products”, Academic Press(2007),p863

［5］ Murray R. Spiegel 著 氏家勝巳訳: “マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック”, オーム社(1995)